BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2013

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Э.Б.СУЛТАНОВА
Бакинский Государственный Университет
elnaresultan @.mail.ru

В работе исследованы некоторые аналитические свойства резольвенты некоторого квадратичного операторного пучка и доказана теорема о двукратной полноте собственных и присоединенных векторов в смысле Келдыша. Условия, обеспечивающие двукратной полноты системы собственных и присоединенных векторов, даны в терминах коэффициентов квадратичного операторного пучка.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, резольвента, собственный и присоединенный вектор*

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H квадратичный пучок операторов

$$M(\lambda) = -(\lambda E - \omega_1 G)(\lambda E - \omega_2 G) + \lambda G_1 + \lambda G_2 . \qquad (1)$$

Здесь выполняются следующие условия

1) $\omega_1 < 0, \ \omega_2 > 0$

2) G - положительно определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным $C = G^{-1} \in \sigma_\infty(H)$.

3) Операторы $F_1 = G_1 G^{-1}, \ \ F_2 = G^{-1} G_2 G^{-1}$ ограничены в H.

В данной работе мы исследуем некоторые спектральные свойства пучка (1). Отметим, что квадратичный операторный пучок (1) исследован достаточно во многих работах [2-6], в разных ситуациях.

Пусть H_γ -гильбертово пространство с нормой $\|x\|_\gamma = \|A^\gamma x\|, \gamma \ge 0$.

Определение 1. Пусть существует вектор $0 \ne \varphi_0 \in H_2$, который удовлетворяет уравнению $M(\lambda_0)\varphi_0 = 0$. Тогда λ_0 называется собственным вектором пучка (1), а φ_0 соответствующий собственный вектор пучка (1). Если система $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_m\} \in H_2$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} M^{(j)}(\lambda_0)\varphi_{k-j} = 0, \quad k = 0,1,...,m_0,$$

то $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_m\}$ называется цепочкой собственных и присоединенных векторов, отвечающая собственному значению λ_0. Число $m_0 + 1$ называется длина этой цепочки. Если собственному значению λ_0 отвечает несколько цепочек собственных и присоединенных векторов, то максимальная длина их называется кратность собственного значения.

Определение 2. Если операторный пучок имеет только собственное значение с конечной кратностью, то говорят, что $M(\lambda)$ имеет только дискретный спектр. Обозначим через

$$M_0(\lambda) = -(\lambda E - \omega_1 G)(\lambda E - \omega_2 G), \qquad M_1(\lambda) = \lambda G_1 + G_2.$$

Имеет место

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1)-3) и оператор $\left(-\omega, \omega^2 E + F_2\right)$ обратим в H. Тогда операторный пучок $M(\lambda)$ имеет только дискретный спектр, с единичной предельной точкой в бесконечности.

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned}
M(\lambda) &= -G((\lambda G^{-1} - \omega_1 E)(\lambda G^{-1} - \omega_2 E) + \lambda G^{-1} G_1 G^{-1} + G^{-1} G_2 G^{-1})G = \\
&= -G(\lambda^2 G^{-2} - \lambda(\omega_1 + \omega_2)G^{-1} - \omega_1\omega_2 E) + \lambda^2 G^{-1} F_1 + F_2))G = \\
&= -G(\lambda^2 C^2 - \lambda(\omega_1 + \omega_2)C + (-\omega_1\omega_2 E + F_2) + \lambda C F_1)G = \qquad (2)\\
&= -G(\lambda^2 C^2 (-\omega_1\omega_2 E + F_2)^{-1} - \lambda\left[(\omega_1 + \omega_2)E - CF_1\right](-\omega_1\omega_2 E + F_2)^{-1} + E) \times \\
&\times (-\omega_1\omega_2 E + F_2)G = GL(\lambda)(-\omega_1\omega_2 E + F_2)G
\end{aligned}$$

где

$$L(\lambda) = E + \lambda T_1 + \lambda^2 T_2,$$

причем,

$$T_1 = (-(\omega_1 + \omega_2)C^{-1} - CF_1)(-\omega_1\omega_2 E + F_2)^{-1} \in \sigma_\infty(H)$$

$$T_2 = C^2(-\omega_1\omega_2 E + F_2)^{-1} \in \sigma_\infty(H).$$

Таким образом, $\lambda T_1 + \lambda^2 T_2 \in \sigma_\infty(H)$ при любом λ из комплексной плоскости, $L(0) = E$ обратим в Н, поэтому из леммы Келдыша $[1]$ следует, что операторный пучок $L(\lambda)$ имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Очевидно, что $M(\lambda)$ обратим, тогда и только тогда, когда обратим $L(\lambda)$ причем,

$$M^{-1}(\lambda) = G^{-1}(\left|\omega_1\omega_2\right| + F_1)^{-1} L^{-1}(\lambda) G^{-1}.$$

Таким образом, $M^{-1}(\lambda)$ также имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности.

Лемма 2. Пусть выполняются условия леммы 1, причем $G^{-1}=C\in\sigma_p$, $0<\rho<1$. Тогда резольвента $M^{-1}(\lambda)$ представляется в виде $M^{-1}(\lambda)=\dfrac{D(\lambda)}{D_1(\lambda)}$, где $D(\lambda)$-целая оператор функция порядка ρ и минимального типа при порядке ρ, а $D_1(\lambda)$-скалярная целая функция порядка ρ и минимального типа при порядке ρ.

Доказательство. Так как $L(\lambda)=E+\lambda T_1+\lambda^2 T_2$, где при

$$G^{-1}=C\in\sigma_\rho .T_1=(-(\omega_1+\omega_2)C-CF_1)(-\omega_1\omega_2 E+F_2)^{-1}\in\sigma_\rho$$

$$T_1=C^2(-\omega_1\omega_2 E+F_2)^{-1}\in\sigma_{\rho/2}.$$

Тогда из леммы Келдыша [1] следует, что $L^{-1}(\lambda)=\dfrac{Q_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}$, где $Q_1(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$-целые функции порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ. Тогда $M^{-1}(\lambda)=\dfrac{D(\lambda)}{D_1(\lambda)}$, где $D(\lambda)=G^{-1}(\omega_1\omega_2 E+F_1)^{-1}Q_1(\lambda)G^{-1}$, а $D_1(\lambda)$ целая скалярная функция.

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть выполняется условия 1)-3) и выполняется неравенство

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{1}{|\omega_1\omega_2|^{1/2}}\|F_1\|+\frac{1}{|\omega_1\omega_2|}\|F_2\|<1.$$

Тогда на мнимой оси имеет место неравенство $\mathrm{Re}(M(i\xi)x,x)>0, x\in H_2$.

Доказательство. Пусть $\lambda=i\xi,\xi\in R, -(\omega_1+\omega_2)=p,\ -\omega_1\omega_2=|\omega_1\omega_2|=q^2$. Тогда $\mathrm{Re}\left(\xi^2 E-i(\omega_1+\omega_2)\xi G+|\omega_1\omega_2|G^2\right)x,x)=\mathrm{Re}\left((\xi^2-ip\xi G+q^2G^2)x,x\right)$

$$\mathrm{Re}(M_0(i\xi)x,x)=((\xi^2E+q^2G^2)x,x)=\|x\|^2+q^2\|Gx\|^2>q^2\mu_0^2\|x\|^2, \mu_0>0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(M(i\xi)x,x)=\mathrm{Re}(M_0(i\xi)x,x)+\mathrm{Re}(M_1(i\xi)x,x)\ \geq \mathrm{Re}(M_0(i\xi)x,x)-\\&-|\mathrm{Re}(M_1(i\xi)x,x)|>|\mathrm{Re}(M_0(i\xi)x,x)|-|(M_1(i\xi)x,x)|.\end{aligned}\tag{3}$$

Так как $|(M_1(i\xi)x,x)|\leq|\xi(G_1x,x)|+|(G_2x,x)|$, то оценим каждый член в отдельности. Очевидно, что

$$\left|\xi(G_1 x,x)\right| = \left|(C_1 x,\xi x)\right| = \left|G_1 G^{-1} Gx,\xi x)\right| = \left|(F_1 Gx,\xi x)\right| \le \|F_1\|\cdot\|Gx\|\cdot\|\xi x\| =$$

$$= \frac{1}{q}\|F_1\|\cdot\|q\cdot Gx\|\cdot\|\xi x\| \le \frac{1}{q}\|F_1\|\cdot(\frac{1}{2}\|qGx\|^2 + \|\xi x\|^2) = \frac{1}{2}\|F_1\|\cdot(q^2\|Gx\|^2 + \xi^2\|x\|^2) = \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2}\|F_1\|\cdot(M_0(i\xi)x,x).$$

С другой стороны,

$$\left|(G_2 x,x)\right| = \left|(GG^{-1}G_2 G^{-1}Gx,x)\right| = \left|(GF_2 Gx,x)\right| = \left|F_2 Gx,Gx\right| \le \frac{1}{q^2}\left\|(F(qGx),qGx)\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{q^2}\|F_2\|\left(q^2\|Gx\|^2 + \xi^2\|x\|^2\right) = \frac{1}{q^2}\|F_2\|(M_0(i\xi)x,x).$$

Таким образом, из неравенств (5),(6) и (7) получаем

$$\mathrm{Re}\left(M\ \ (i\xi)x,x\right) > \left(M\ \ (i\xi)x,x\right) - (\frac{1}{2q}\|F_1\| + \frac{1}{q^2}\|F_2\|)(M_0(i\xi)x,x) =$$

$$(1-\varepsilon)(M_0(i\xi)x,x) > 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 мы не использовали вполне непрерывность оператора G^{-1}.

Замечание 2. Если $G^{-1} \in \sigma_\infty(H)$, то из условия теоремы вытекает, что $\left|\omega_1\omega_2\right| + F_2$ обратим в H, т.е. пучок $P(\lambda)$ имеет дискретный спектр.

Теперь докажем теорему о двукратной полноте системы собственных и присоединенных векторов операторного пучка $M(\lambda)$ в смысле Келдыша [1].

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка $M(\lambda)$ двукратно полна в H в смысле Келдыша, если выполняются одно из условий:

а) $G^{-1} = C \in \sigma_\rho$, $(0 < \rho \le 1)$

или

в) $F_j \in \sigma_\rho(H)$, $1 < \rho < \infty,\ j = 1,2$.

Доказательство. Если система не двукратно полна в H, то найдутся векторы f_0 и f_1, $\|f_0\| + \|f_1\| \ne 0$ такие, что $(M^{-1}(\bar{\lambda}))^*(f_0 + \lambda f_1)$ целая вектор функция [1], причем на мнимой оси имеет место неравенство

$$\|M(i\xi)x\|\cdot\|x\| \ge \left|(M(i\xi)x,x)\right| \ge \left|\mathrm{Re}(M(i\xi)x,x)\right| \ge (1-\varepsilon)\mathrm{Re}(M(i\xi)x,x) =$$

$$= (1-\varepsilon)\left(\xi^2\|x\|^2 + \|Gx\|^2\right) \ge (1-\varepsilon)\left(\xi^2\|x\|^2 + \mu_0^2\|x\|^2\right) = (1-\varepsilon)\left(\xi^2 + \mu_0^2\right)\|x\|^2$$

Следовательно, при $\lambda = i\xi, \xi \in R$ имеем:

$$\left\|M^{-1}(i\xi)\right\| \le \frac{1}{1-\varepsilon}\cdot\frac{1}{\xi^2 + \mu_0^2}.$$

Если $G^{-1} \in \sigma_p$, то $(M^{-1}(\xi))^*\left(f_0 + \lambda f_1\right) = R(\lambda)$ есть целая функция порядка ρ и минимального типа. Тогда очевидно, что функция $\|R(\lambda)\|$ для любого $\lambda \to \infty, \|R(\lambda)\| \to 0$ при $\xi \to \infty$.Так как при выполнении условия а) $G^{-1} \in \sigma_p$, $(0 < p \le 1)$, применяя теорему Фрагмена – Линделефа получаем, что $\|R(\lambda\| \to 0,$ при $\lambda \to \infty$, λ из комплексной плоскости. Отсюда получаем, что $R(\lambda) = 0$, тождественно на комплексной плоскости. Отсюда получаем, что $f_0 = f_1 = 0$.

При выполнении условия в) мы сперва используя теорему Келдыша, показываем, что на лучах $\Gamma_\alpha = te^\alpha, t > 0, \alpha \ne 0, \pi, \|R(\lambda)\| \to 0$, далее применяем теорему Фрагмена-Линделефа получаем, что $R(\lambda) = 0$, т.е. $f_0 = f_1 = 0$. Теорема доказана.

Используя результаты работы [1] аналогично доказывается следующая

Теорема 3. Пусть операторный пучок $M(\lambda)$ имеет вид

$$M(\lambda) = -(\lambda - \omega_1 E)(\lambda - \omega_2 E) + \lambda(G_1 + K_1) + (G_2 + K_2) + G^2, \qquad (5)$$

где операторы G, G_1 и G_2 удовлетворяют условия теоремы 2, а операторы $K_1 G^{-1}$ и $K_2 G^{-2}$ вполне непрерывные операторы в H.Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка (5) двукратно полна в пространстве H.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов. //УМН, т.26, №4,1971, с.15-41.
2. Мирзоев С.С. Гулиева Ф.А. О полноте элементарных функций одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка. //Математ. заметки, 2009, т.86, №5, с.797-800.
3. Мирзоев С.С. Салимов М.Ю. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка. //Сибирский матем.журнал, 2010, т.51, №4, с. 851-858.
4. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН, 1971, т.26, №4 (160) с.15-41.
5. Гулиева Ф.А. О полноте собственных и присоединенных векторов одного класса операторных пучков второго порядка // Вестник Бакинского Университета, сер физмат наук , 2006, №4, с.63-69.
6. Гулиева Ф.А. О двукратной полноте собственных и присоединенных векторов одного класса операторных пучков второго порядка в гильбертовом пространстве // Вестник Бакинского Университета, 2010, №1, с.40-44.

КВАДРАТИК ОПЕРАТОР ДЯСТЯНИН СПЕКТРАЛ ХАССЯЛЯРИ ЩАГГЫНДА

Е.Б.СУЛТАНОВА

ХЦЛАСЯ

Мягалядя бир синиф ики тяртибли оператор дястянин резолвентинин бязи аналитик хассяляри юйрянилмиш вя онун мяхсуси вя гошма елементляринин Келдыш мянада икигат тамлыьы щаггында теорем исбат едилмишдир. Мяхсуси вя гошма векторлар системинин икигат тамлыьыны тямин едян шяртляр квадратик оператор дястянин ямсалларынын хассяляри иля верилмишдир.

Ачар сюзляр: мяхсуси вя гошма вектор, резолвент, спектр

ON SOME SPECTRAL PROPERTIES OF QUADRATIC OPERATOR BUNDLE

E.B.SULTANOVA

SUMMARY

We have studied the behaviour of the resolvent of a quadratic operator bundle and a theorem on the twofold completeness of eigen and adjoint vectors in the sense of Keldysh. Conditions providing twice the completeness of eigen and adjoint vectors are given in terms of coefficients of quadratic operator bundle.

Key woods: reыolvent, eigen and adjoint vector, Hilbert Space

Поступило в редакцию: 19.10.2013 г.
Подписано к печати: 17.10.2013 г.